Correction DS 3

Exercice 1 :

Q1. * le point M a un mouvement de translation à vitesse v_0 constante le long du bras de la grue donc $\boxed{r(t) = v_0 t}$.

* le bras de la grue tourne dans le plan horizontal à la vitesse ω_0 constante donc $\boxed{\theta(t) = \omega_0 t}$

* En isolant t dans la 1ère expression $t = \frac{r}{v_0}$ on obtient : $\boxed{\theta = \frac{\omega_0}{v_0} r}$

* Cette trajectoire est une spirale.

Q2. On se place en coordonnées polaires :

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ soit $\boxed{\overrightarrow{OM} = v_0 t . \vec{u}_r}$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = v_0 \vec{u}_r + v_0 . \omega_0 t \, \vec{u}_\theta$

soit $\boxed{\vec{v} = v_0 \vec{u}_r + v_0 . \theta \, \vec{u}_\theta}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_0^2 + v_0^2 \theta^2}$

En notant $\|\vec{v}\| = v$ on a : $\boxed{v = v_0 \sqrt{1+\theta^2}}$

$$\vec{a} = v_0 \dot{\theta} \vec{u_\theta} + v_0 \dot{\theta} \vec{u_\theta} - v_0 \theta . \dot{\theta} \vec{u_r}$$

$$\boxed{\vec{a} = 2 v_0 \omega_0 \vec{u_\theta} - v_0 \omega_0 \theta \vec{u_r}}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{4 v_0^2 \omega_0^2 + v_0^2 \omega_0^2 \theta^2}$$

En notant $\|\vec{a}\| = a$ on obtient :

$$\boxed{a = v_0 \omega_0 \sqrt{4 + \theta^2}}$$

Q3. Caractéristiques du mouvement

* pour $\theta = 0$:

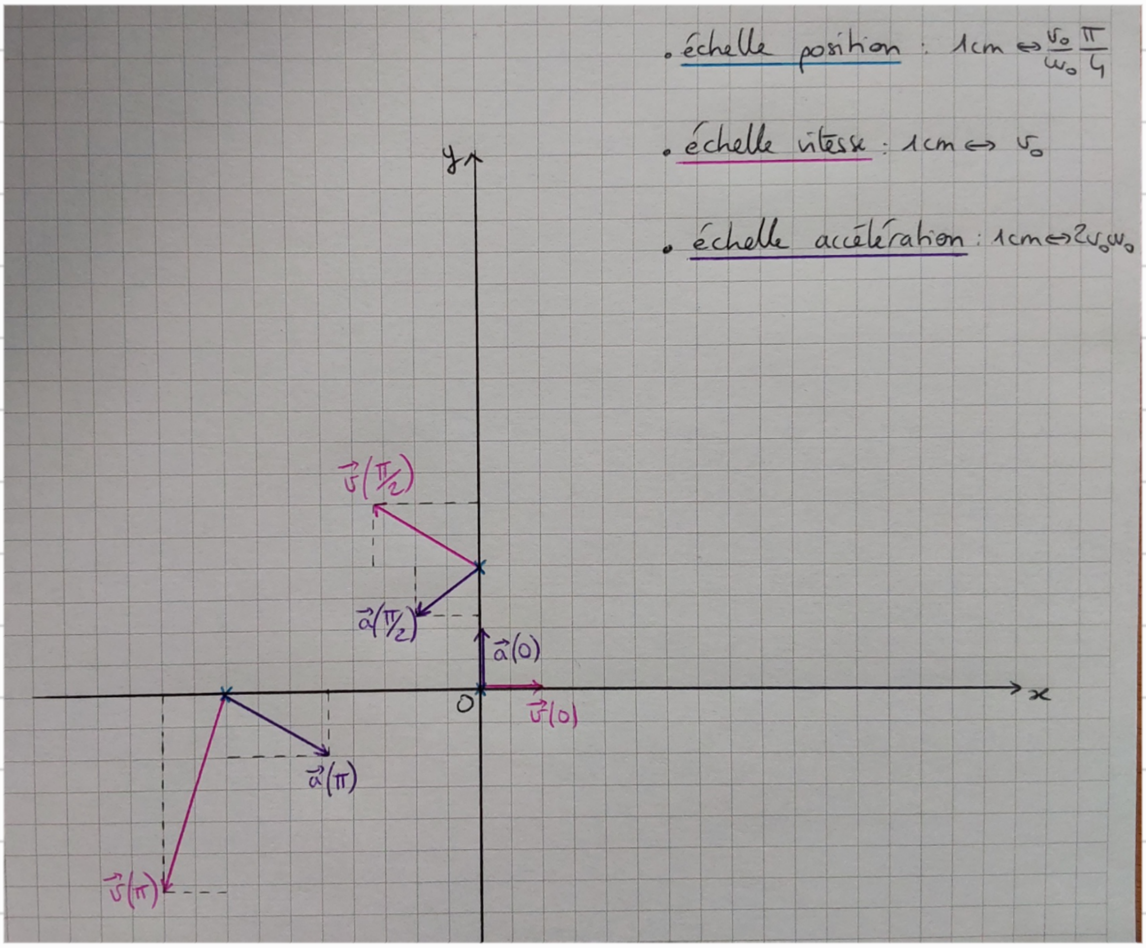
$$\boxed{\begin{aligned} r &= 0 \\ \vec{v} &= v_0 \vec{u_r} \\ \vec{a} &= 2 v_0 \omega_0 \vec{u_\theta} \end{aligned}}$$

* pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \frac{v_0}{\omega_0} \frac{\pi}{2} \\ \vec{v} &= v_0 \vec{u_r} + v_0 \frac{\pi}{2} \vec{u_\theta} \\ \vec{a} &= 2 v_0 \omega_0 \vec{u_\theta} - v_0 \omega_0 \frac{\pi}{2} \vec{u_r} \end{aligned}}$$

* pour $\theta = \pi$

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \frac{v_0}{\omega_0} \pi \\ \vec{v} &= v_0 \vec{u_r} + v_0 \pi \vec{u_\theta} \\ \vec{a} &= 2 v_0 \omega_0 \vec{u_\theta} - v_0 \omega_0 \pi \vec{u_r} \end{aligned}}$$

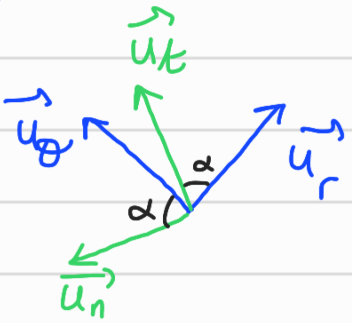


Q4. $\vec{u}_t = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{v_0}{v}\,\vec{u}_r + \dfrac{v_0\theta}{v}\,\vec{u}_\theta$

or $v = v_0\sqrt{1+\theta^2}$, on a donc :

$$\boxed{\vec{u}_t = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,\vec{u}_r + \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\,\vec{u}_\theta}$$

Q5 $\vec{u}_n$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}_t$ et dirigé vers l'intérieur de la trajectoire.



$$\begin{cases} \vec{u}_t \cdot \vec{u}_r = \vec{u}_n \cdot \vec{u}_\theta \\ \vec{u}_t \cdot \vec{u}_\theta = -\vec{u}_n \cdot \vec{u}_r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{composante de } \vec{u_n} \text{ sur } \vec{u_\theta} = \text{composante de } \vec{u_t} \text{ sur } \vec{u_r} \\ \text{composante de } \vec{u_t} \text{ sur } \vec{u_\theta} = - \text{composante de } \vec{u_n} \text{ sur } \vec{u_r} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{u_n} = -\frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_r} + \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_\theta}}$$

Q6. Dans le repère de Frenet : $\vec{a} = \frac{v^2}{\rho}\vec{u_n} + \frac{dv}{dt}\vec{u_t}$

avec ρ = rayon de courbure et $v = v_0\sqrt{1+\theta^2}$

Pour identifier avec $\vec{a} = 2v_0\omega_0\vec{u_\theta} - v_0\omega_0\theta\vec{u_r}$,

déterminons $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ en fonction de $\vec{u_t}$ et $\vec{u_n}$.

On a $\begin{cases} \vec{u_n} = -\frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_r} + \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_\theta} \\ \vec{u_t} = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_r} + \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_\theta} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{u_n} + \theta\vec{u_t} = \frac{1+\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_\theta} = \sqrt{1+\theta^2}\,\vec{u_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{u_\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_n} + \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_t}$$

$$\text{et } \theta\vec{u_n} - \vec{u_t} = -\frac{1+\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_\theta} = -\sqrt{1+\theta^2}\,\vec{u_r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u_r} = \frac{-\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_n} + \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_t}$$

En injectant $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ dans $\vec{a}$ on obtient :

$$\vec{a} = 2v_0\omega_0\left(\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_n} + \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_t}\right)$$

$$- v_0\omega_0\theta\left(-\frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_n} + \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_t}\right)$$

soit $\vec{a} = \dfrac{2v_0\omega_0 + v_0\omega_0\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_n} + \dfrac{2v_0\omega_0\theta - v_0\omega_0\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\vec{u_t}$

D'où $\dfrac{2v_0\omega_0 + v_0\omega_0\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}} = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{v_0^2(1+\theta^2)}{\rho}$

On résout : $\rho = \dfrac{v_0^2(1+\theta^2)^{3/2}}{2v_0\omega_0 + v_0\omega_0\theta^2}$

soit $\boxed{\rho = \dfrac{v_0(1+\theta^2)^{3/2}}{\omega_0(2+\theta^2)}}$

Q7. Pour déterminer la valeur de θ qui minimise ρ, on détermine θ^2 qui minimise ρ.
En posant $\theta^2 = X$, cela revient à résoudre $\dfrac{d\rho}{dX} = 0$.

$$\rho(x) = \frac{v_0 (1+x)^{3/2}}{\omega_0 (2+x)} = \frac{v_0}{\omega_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{v_0}{\omega_0} \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) . g(x) - f(x) . g'(x) = 0$$

$$\frac{3}{2} (1+x)^{1/2} . (2+x) - (1+x)^{3/2} = 0$$

$$(1+x)^{1/2} \left(\frac{3}{2}(2+x) - (1+x) \right) = 0$$

$$(1+x)^{1/2} \left(3 + \frac{3x}{2} - 1 - x \right) = 0$$

$$\underbrace{(1+x)^{1/2}}_{>0} \underbrace{\left(2 + \frac{x}{2} \right)}_{>0} = 0$$

donc $\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0 \quad \forall x$ donc $\rho(x)$ est une fonction strictement croissante.

$\rho(x)$ est minimal pour $x = 0$

Lorsque x est minimal $\theta = 0$

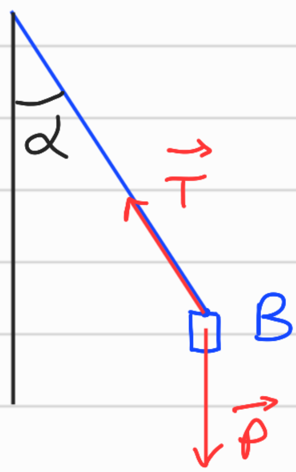
et on a $\rho_{min} = \frac{v_0}{2\omega_0}$

AN : $\rho = \dfrac{3{,}0\,(1+0)^{3/2}}{0{,}5\,(0+2)} = \underline{3{,}0 \text{ m}}$

Q8. $\left.\begin{array}{l} v_0 t = d \\ \omega_0 t = \pi \end{array}\right\}$ $\boxed{\dfrac{v_0}{\omega_0} = \dfrac{d}{\pi}}$

Q9. D'après l'énoncé $\vec{a}(B) = \vec{a}(M) = 2v_0\omega_0\vec{u}_\theta - v_0\omega_0\theta\vec{u}_r$

Bilan des forces : poids : $\vec{P}$ $\begin{cases} \text{vertical vers le bas} \\ \text{norme } P = mg \end{cases}$



tension du fil $\vec{T}$ $\begin{cases} \text{direction du fil} \\ \text{sens : vers } M \\ \text{norme } T. \end{cases}$

On applique le principe fondamental de la dynamique au point B de masse m constante dans R supposé galiléen : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

* Projection dans le plan vertical (xOz) :

$-mg + T\cos\alpha = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = mg$.

* Projection dans le plan horizontal (xOy)

$T\sin\alpha = m\sqrt{4v_0^2\omega_0^2 + v_0^2\omega_0^2\theta^2}$

En combinant ces 2 relations, il vient :

$$\tan\alpha = \frac{m\sqrt{4v_0^2\omega_0^2 + v_0^2\omega_0^2\theta^2}}{mg}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{v_0\omega_0}{g}\sqrt{4+\theta^2}}$$

Q10. D'après la formule ci-dessus $\tan\alpha$ augmente avec θ donc $\tan\alpha$ est maximum pour $\theta = \pi$

$$\tan\alpha_m = \frac{v_0\omega_0}{g}\sqrt{4+\pi^2}$$

donc $$\boxed{v_0\omega_0 = \frac{g\tan\alpha_m}{\sqrt{4+\pi^2}}}$$

Q11. Avec les relations obtenues aux questions Q8 et Q10 on a le système :

$$\begin{cases} \dfrac{v_0}{\omega_0} = \dfrac{d}{\pi} \\ \\ v_0\omega_0 = \dfrac{g\tan\alpha_m}{\sqrt{4+\pi^2}} \end{cases}$$

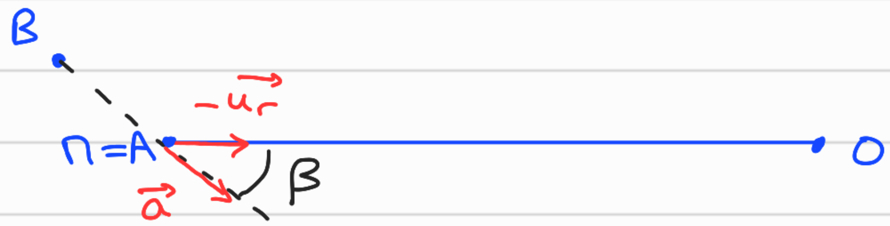
Soit $$v_0^2 = \frac{g.d.\tan\alpha_m}{\pi\sqrt{4+\pi^2}}$$

AN : $$v_0^2 = \frac{25.9,8.\tan 30}{\pi\sqrt{4+\pi^2}}$$

Soit $\underline{v_0 = 3{,}5 \text{ m.s}^{-1}}$

Et $\omega_0 = \dfrac{v_0 \pi}{d}$ AN : $\omega_0 = \dfrac{3{,}5 . \pi}{25} = \underline{0{,}44 \text{ rad.s}^{-1}}$

Q12. Vue de dessus :



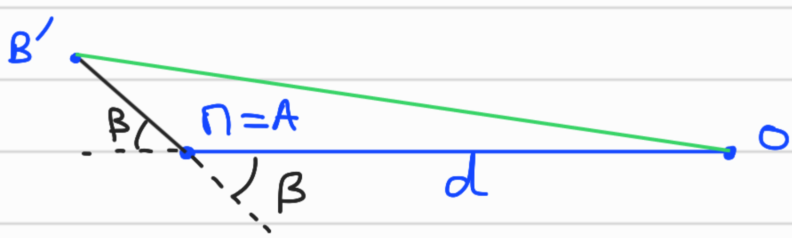
$\vec{a} = 2 v_0 \omega_0 \vec{u_\theta} - v_0 \omega_0 \theta \vec{u_r}$

L'angle $\beta = (-\vec{u_r}, \vec{a})$ est donc tel que

$\tan \beta = \dfrac{2 v_0 \omega_0}{v_0 \omega_0 \theta} = \dfrac{2}{\theta}$

Soit $\tan \beta = \dfrac{2}{\theta}$ AN : $\underline{\beta = 32°}$

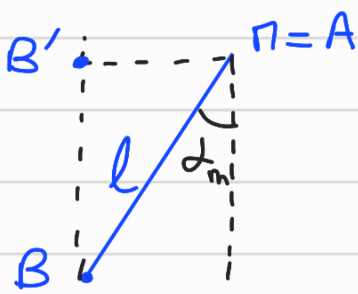
Q13. Schéma en vue dessus :



avec B' = projeté orthogonal de B dans le plan (xOy)

Il faut donc déterminer la distance OB.

Schéma en vue de profil :
on obtient $B'\Pi = \ell \sin \alpha_m$



On détermine les coordonnées de B' dans le plan (xOy) :

$$B' \begin{pmatrix} d + l\sin\alpha_m . \cos\beta \\ l\sin\alpha_m \sin\beta \end{pmatrix}$$

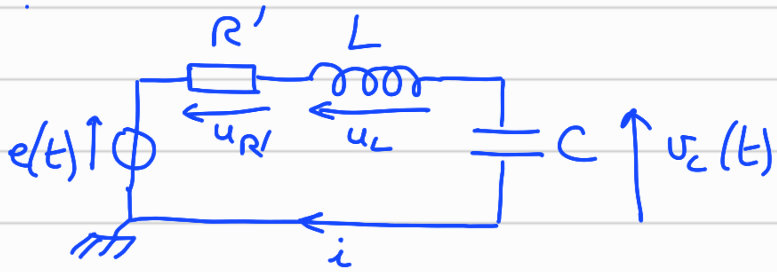
AN : $B' \begin{pmatrix} 25 + 10 . \sin 30 . \cos 32 \\ 10 . \sin 30 . \sin 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29,24 \\ 2,65 \end{pmatrix}$

D'où $OB' = \sqrt{29,24^2 + 2,65^2} = \underline{29,4 \text{ m}}$

Comme le cube a une demi-diagonale de $\sqrt{2}$ m soit environ 1,41 m, le cube touchera le batiment voisin.

Exercice 2 :

Q1. En posant R' = résistance totale du circuit, on a :



La loi des mailles donne :

$u_C + u_L + u_{R'} = e(t) = 0$ en régime libre

Avec la loi d'Ohm ($u_{R'} = R'i$) et la loi tension intensité de la bobine ($u_L = L\frac{di}{dt}$) on obtient $0 = u_C + L\frac{di}{dt} + R'i$.

Avec la loi tension-intensité du condensateur $i = C\frac{du_C}{dt}$, on obtient :

$$0 = u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + R'C\frac{du_C}{dt}$$

Soit $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R'}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0$

On pose $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R'}{L}$ et $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, ce qui permet d'obtenir la forme canonique :

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0}$$

Q2. Pour $Q > \frac{1}{2}$ le polynôme caractéristique de cette équation différentielle a un discriminant négatif et admet 2 racines complexes :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

La partie imaginaire est la pulsation ω des oscillations :

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

Soit $$\boxed{T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$

Avec $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ soit $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$

Q3. En remplaçant ω_0 et Q par leurs expressions on a :

$$T = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{1 - \frac{R'^2C}{4L}}}$$

Soit $T^2 = \dfrac{4\pi^2 . LC}{1 - \dfrac{R'^2 C}{4L}}$ qui peut se

mettre sous la forme $T^2 = \dfrac{a.C}{1 - bC}$ en

posant $\boxed{a = 4\pi^2 L}$ et $\boxed{b = \dfrac{R'^2}{4L}}$

Q4. La modélisation affine est bien ajustée avec les données et l'ordonnée à l'origine est très faible (rélation quasiment linéaire). On peut donc supposer que le terme bC est très petit devant 1, et on a alors $T^2 \simeq a.C$.

Avec les données fournies sur la pente, on peut écrire : $4\pi^2 L = 3{,}3$

soit $L = \dfrac{3{,}3}{4\pi^2} = 8{,}4 . 10^{-2}$ H

soit $\underline{L \simeq 84 \text{ mH}}$

Pour que l'hypothèse $bC \ll 1$ soit vérifiée il faut $\dfrac{R'^2}{4L} C \ll 1$ soit $R' \ll \sqrt{\dfrac{4L}{C}}$

AN : $R' \ll \sqrt{\dfrac{4 . 8{,}4 . 10^{-2}}{10^{-6}}}$ soit $R' \ll 600\ \Omega$

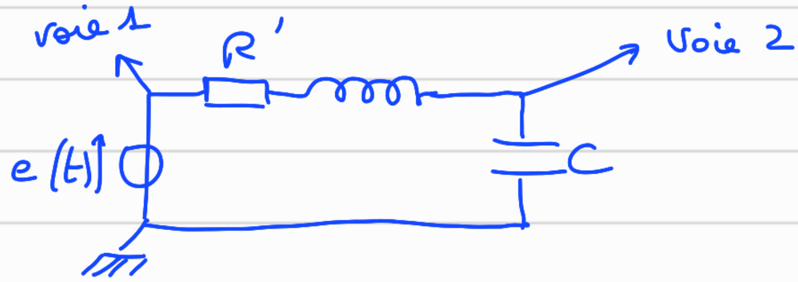
Q5. En régime critique $Q = \frac{1}{2}$ soit

$$\frac{\omega_0}{Q} = 2\omega_0 = \frac{R'_c}{L} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

on a donc $\frac{R'_c}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \iff \boxed{R'_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$

Q6. Courbe 3 : régime pseudo-périodique (1 oscillation)
Courbe 1 : régime apériodique (décroissance monotone)
Courbe 2 : regime critique (retour le plus rapide à $v_c(\infty)$)

Q7.



Q8. $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} - R_g - r$

Donc la représentation graphique de R_c en fonction de $\frac{1}{\sqrt{C}}$ est une droite de pente $2\sqrt{L}$ et d'ordonnée à l'origine $-R_g - r$.
Donc $-R_g - r = -81\ \Omega \Rightarrow R_g + r = 81\ \Omega$

Or d'après le document 1 $R_g = 50\ \Omega$
on a donc $\boxed{r = 31\ \Omega}$

La résistance interne du générateur étant annoncée avec une précision de 5% soit $2{,}5\ \Omega$
on a $u(R_g) = \frac{2{,}5}{\sqrt{3}} = 1{,}5\ \Omega$

L'incertitude sur l'ordonnée à l'origine n'étant pas indiquée on a $u(r) \geq u(R_g)$

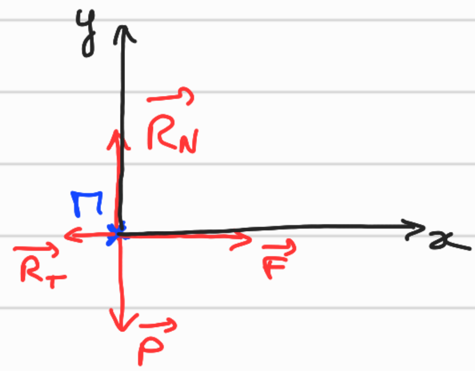
En posant $u(r) = u(R_g)$ on a :

$$\boxed{r = 31{,}0\,\Omega \quad \text{avec } u(r) = 1{,}5\,\Omega}$$

Exercice 3 :

Q1. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système {traîneau} dans le référentiel terrestre supposé galiléen donne :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$$



A l'état initial, le traîneau est immobile :

$\vec{v} = \vec{0}$ donc $\vec{a} = \vec{0}$

En projection sur $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$, on a :

$$\begin{cases} F - R_T = 0 \\ -mg + R_N = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} F = R_T \\ R_N = mg \end{cases}$$

Or le traîneau étant immobile, on a la relation $R_T < f . R_N$

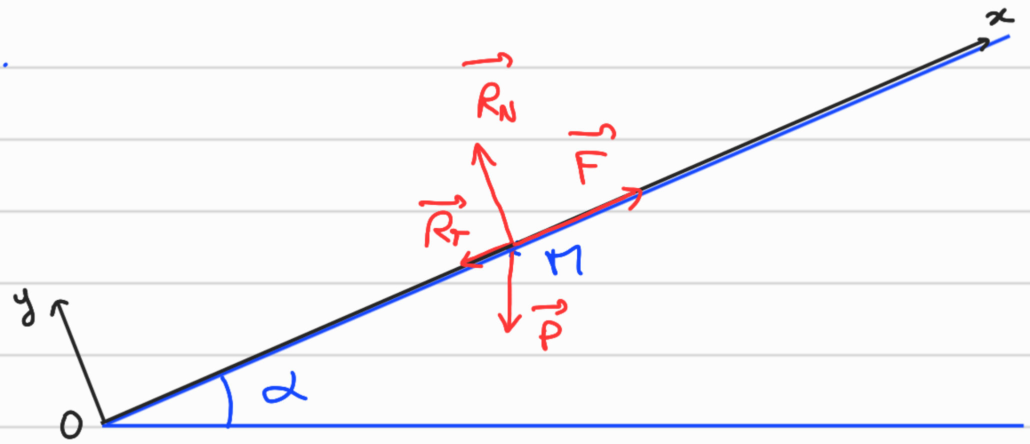
Pour $R_T = f . R_N$ le traîneau commence à glisser.

On a donc $F_{min} = f . R_N$ soit $\boxed{F_{min} = f . mg}$

AN : $F_{min} = 5{,}0 . 10^{-2} . 5{,}0 . 10^{2} . 9{,}8 = 245 \text{ N}$

$F_{min} = 2{,}5 . 10^{2} \text{ N}$ avec 2 chiffres significatifs.

Q2.



Le principe fondamental de la dynamique en projection sur Ox et Oy donne :

$$\begin{cases} -mg\sin\alpha - R_T + F = m a_x \\ -mg\cos\alpha + R_N = m a_y = 0 \end{cases}$$ car il n'y a pas de mouvement sur Oy.

Soit $R_N = mg.\cos\alpha$.

Au repos on a $R_T < f.R_N$ et $a_x = 0$

soit $-mg\sin\alpha + F = R_T < f.R_N$

$$-mg\sin\alpha + F < f.\,mg.\cos\alpha$$

Soit $F < fmg\cos\alpha + mg\sin\alpha$

$$F < mg(f\cos\alpha + \sin\alpha)$$

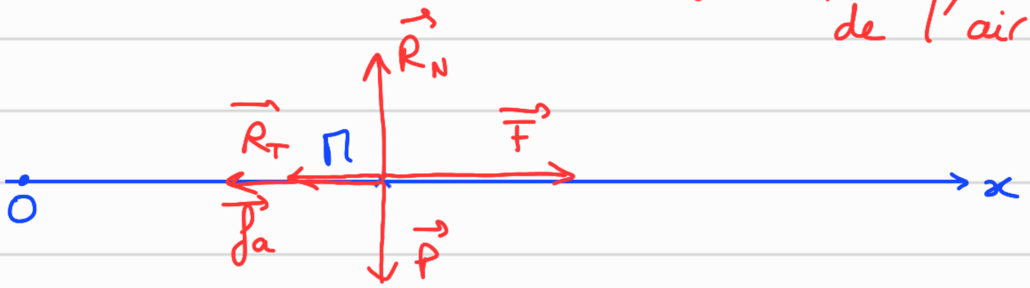
En posant $f\cos\alpha + \sin\alpha = f'$ on a

$F < f'mg$.

La force minimale que les rennes doivent appliquer est $\boxed{F_{min} = f' mg}$ avec $f' = f\cos\alpha + \sin\alpha$

Q3. On choisit un axe Ox dans la direction et le sens du mouvement de sorte que $\vec{v} = v\vec{u_x}$ avec $v = \dot{x} > 0$.

$\vec{f_a}$ = force de frottements de l'air.



On applique le principe fondamental de la dynamique au système traîneau dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{P} + \vec{R_T} + \vec{R_N} + \vec{f_a} + \vec{F} = m\vec{a}.$$
$$\vec{P} + \vec{R_T} + \vec{R_N} - \beta\vec{v} + \vec{F} = m\vec{a}$$

En projetant sur les axes (Ox) et (Oy) on obtient :

$$\begin{cases} -R_T - \beta\dot{x} + F = m\ddot{x} \\ -mg + R_N = 0 \end{cases}$$

En mouvement on a $R_T = f . R_N = f . mg$

Soit $m\ddot{x} = -fmg - \beta\dot{x} + F$

Or $\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$ et $\dot{x} = v$

soit $$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m} v = \frac{F}{m} - fg}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{F}{m} - fg$$

avec $\boxed{\tau = \frac{m}{\beta}}$

Q4. La solution de cette équation différentielle du 1er ordre à coefficients constants est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

* Solution particulière : pour $v = \text{cte}$ on a $v = \frac{F - fmg}{\beta}$

* Solution générale de l'équation homogène : $v = Ae^{-t/\tau}$

* Solution complète : $v(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{F - fmg}{\beta}$

On détermine la constante A avec la condition initiale $v(0) = 0$:

$$0 = A + \frac{F - fmg}{\beta} \Rightarrow A = -\frac{F - fmg}{\beta}$$

En posant $v_\ell = \frac{F - fmg}{\beta}$ on a $\boxed{v(t) = v_\ell \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

Pour $t \to +\infty$ on a $v \to v_\ell$ donc v_ℓ est la valeur limite que prend la vitesse (et lorsque $v = v_\ell$ $\frac{dv}{dt} = 0$).

Q5. A la date t_1 $v(t_1) = 0{,}95\, v_\ell$

soit $1 - e^{-t_1/\tau} = 0{,}95$

$\Leftrightarrow$ $e^{-t_1/\tau} = 0{,}05$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{t_1}{\tau} = -\ln 0{,}05$

$\Leftrightarrow$ $\tau = \dfrac{-t_1}{\ln 0{,}05}$

Soit $\dfrac{m}{\beta} = -\dfrac{t_1}{\ln 0{,}05}$ $\Leftrightarrow$ $\beta = -\dfrac{m \cdot \ln 0{,}05}{t_1}$

AN : $\beta = -\dfrac{5{,}0 \cdot 10^2 \cdot \ln 0{,}05}{5{,}0} = \underline{3{,}0 \cdot 10^2 \ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}}$

On détermine F avec l'expression $v_\ell = \dfrac{F - f m g}{\beta}$

$F = \beta v_\ell + f m g$

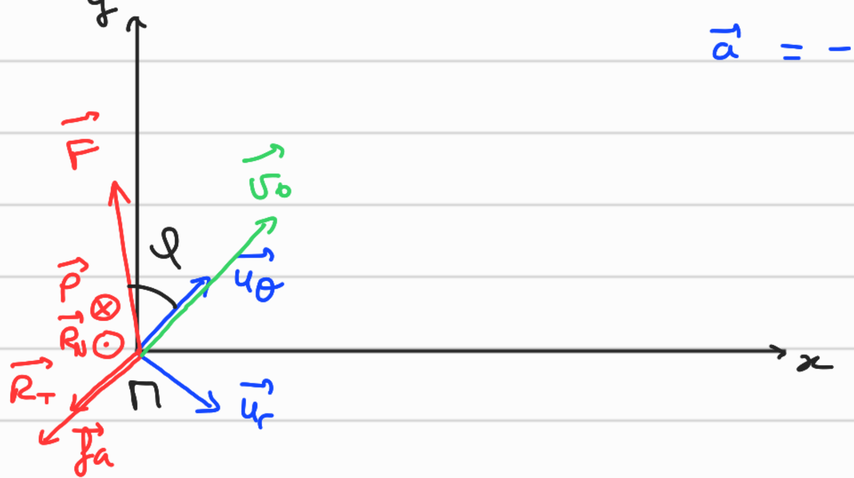
AN : $F = 3{,}0 \cdot 10^2 \cdot 3{,}0 + 5 \cdot 10^{-2} \cdot 5{,}0 \cdot 10^2 \cdot 9{,}8 = \underline{1{,}1 \cdot 10^3 \ \mathrm{N}}$

Q6. En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = R\, \vec{u}_r$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\, \vec{u}_\theta = v_0\, \vec{u}_\theta$

$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\, \vec{u}_r = -\dfrac{v_0^2}{R}\, \vec{u}_r$

Q7.



D'après la 2^{de} loi de Newton, on a :

$$\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F} + \vec{f_a} + \vec{R_T} = -\frac{m v_0^2}{R} \vec{u_r}$$

avec $\vec{R_T} = -f . R_N \vec{u_\theta}$

$\vec{f_a} = -\beta v_0 \vec{u_\theta}$

$\vec{F} = F\cos\varphi \vec{u_\theta} - F\sin\varphi \vec{u_r}$

En projetant cette relation selon les 3 directions on obtient :

$$\begin{cases} -F\sin\varphi = -m\frac{v_0^2}{R} \\ F\cos\varphi - fR_N - \beta v_0 = 0 \\ -mg + R_N = 0 \end{cases}$$

Q8.

$$\begin{cases} F\sin\varphi = \frac{m v_0^2}{R} \\ F\cos\varphi = \beta v_0 + fmg. \end{cases}$$

on a donc $\boxed{\tan\varphi = \frac{m v_0^2}{R(\beta v_0 + fmg)}}$

Et $F^2 = \frac{m^2 v_0^4}{R^2} + (\beta v_0 + fmg)^2$

Soit $\boxed{F = \sqrt{\frac{m^2 v_0^4}{R^2} + (\beta v_0 + f mg)^2}}$

Q9 a) la relation $F(R)$ montre que F diminue quand R augmente pour une valeur de v_0 fixée. On en déduit que les courbes sont d'autant plus hautes que R est petit.

b) Dans l'expression de F, la courbure intervient dans le terme en $\frac{m^2 v_0^4}{R^2}$, qui devient négligeable lorsque R tend vers $+\infty$.
Comme les courbes correspondant à $R = 30$ m et $R = 40$ m sont quasiment confondues sur le graphique (les 2 plus basses), on conclut qu'au delà de $R = 30$ m, la courbure ne sera que très peu perceptible. (pour $R > 40$ m les courbes seraient indiscernables).

c) Sur la courbe correspondant à $R = 10$ m, on lit $v_0 = 2{,}7\ m.s^{-1}$ pour $F = 1100$ N.
Or on avait déterminé une traction de $1{,}1.10^3$ N en mouvement rectiligne pour une vitesse de $3{,}0\ m.s^{-1}$.
Pour maintenir une traction de 1100 N, la vitesse du traîneau doit être réduite.
(ou pour conserver une vitesse de $3{,}0\ m.s^{-1}$, la traction doit être augmentée : ≈ 1250 N pour un rayon de courbure de 10 m.)

d) On fait l'AN de $\tan \varphi$ avec $v_0 = 2{,}7\,m.s^{-1}$:

$$\tan \varphi = \frac{2{,}7^2 \cdot 5{,}0 \cdot 10^2}{10\left(3{,}0 \cdot 10^2 \cdot 2{,}7 + 5{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot 5{,}0 \cdot 10^2 \cdot 9{,}8\right)}$$

ce qui donne $\boxed{\varphi = 19°}$